1.33) $\mathbb{L} := \{tv + w : t \in \mathbb{R}\}$ $\quad w \in S_1 \setminus S_2$

$v \in S_2 \setminus S_1$

Pruebo que $\mathbb{L}$ tiene un único punto en común con S_1.

~~Como~~

Como $\bar{X} = tv + w$, si tomo $t=0$, $\rightarrow \bar{X} = w \in S_1$, que será el único punto en común, ya que en cualquier otro $t \in \mathbb{R}$.

$\rightarrow \bar{x} - w = tv \rightarrow \underbrace{\frac{1}{t} \cdot (x-w)}_{\mathrm{I}} = \underset{\mathrm{II}}{v}$, pero esto es absurdo ya que

I $\in S_1$ y II $\in S_2$, y para que sea posible $w \in S_2$ o $v \in S_1$,

Pero por enunciado $w \in S_1 \setminus S_2$ y $v \in S_2 \setminus S_1$, por lo cual no es posible. Entonces el único punto en común de $\mathbb{L}$ con S_1 es en $t=0$.

Pruebo que ningún punto de $S_2 \in \mathbb{L}$:

Si pertenecería $\rightarrow$ $x = tv + w \rightarrow w = x - tv$, que nos dice que $w \in S_2$, pero es absurdo ya que $w \in S_1 \setminus S_2$, por lo tanto no existe un $t \in \mathbb{R}$ que haga que un punto de $S_2 \in \mathbb{L}$.

Compruebo que $\mathbb{V}$ no puede ser unión de dos subespacios propios.

Si tengo dos s.e. de V, S_1 y S_2, en donde S_1 no está incluido en S_2 ni viceversa.

Como son subespacios: $O_V \in S_1$ y $O_V \in S_2 \rightarrow O_V \in S_1 \cup S_2$ ✓

Pero para $U + V \in S_1 \cup S_2$, puedo tener $U \in S_1$ y $V \in S_1$

$U \in S_1$ y $V \in S_2$

$U \in S_2$ y $V \in S_1$

$U \in S_2$ y $V \in S_1$

Si tomo $u \in S_1$ y $v \in S_2$ no necesariamente $u+v \in S_1 \cup S_2$,

Por ejemplo: Tomo $S_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0\}$

$$S_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_2 = 0\}$$

Tomo $u \in S_1 : u = (-2, 1, 0)$ y $v \in S_2 : v = (-1, 0, 2)$

Entonces $\rightarrow$ $u+v = (-3, 1, 2) \notin S_1 \cup S_2$ ya que $\notin S_1$ y $\notin S_2$.

Por lo tanto $S_1 \cup S_2$ no cumple los requisitos para ser un subespacio ya que la suma no es cerrada.